非線型格子と連続体模型の関係 (流体力学における非線型問題)

AUTHOR(S):

TODA, MORIKAZU

数理解析研究所講究録
185巻 1973年 58-65

非線型格子と連続体模型の関係

東教大 光研 戸田盛和

§1. 序

非線型波動現象に関する今迄の議論のほとんどすべては，無限領域（$-\infty < x < \infty$）に対するものであった。今後の一つの方向として有限領域の，したがって境界条件を付加した問題を考える必要があると思う。

有限領域ということは物理的な実験では当然常に考えなければならない筈であるが，減衰で遠方からの反射波が消える実情が幸いする場合，境界における波の減衰をことさらに強めることができる場合などが選ばれて無限領域の波の理論を適用するのがふつうである。しかし，物理的，あるいは工学的な問題では境界における波の反射の影響などが重要である。線型の波動の場合は，無限領域における解を重ね合わせることによって境界条件を満足させることができるから，領域が有限であることは本質的な困難にはならない。これに対して

非線型問題では，境界条件は一般に大きな困難を導き入れるものである。それにも拘らず，問題の重要さからいって，将来は境界条件を考えた非線型問題の理論的考察が進められなければならない。また，例えば水槽実験においても，境界・末端の問題を積極的に取り上げてほしいと思う。

有限領域として考えられるのは (i) 周期条件 (ii) 固定端 (iii) 自由端 などがある。

歴史的にいって，(i) と(ii) とはその例がいくつかある。特に計算機実験では，有限個数の粒子からなる体系の運動，あるいは有限連続体の運動を考える必然性から，このような条件が使われている。第1に，非線型格子の振動を扱ったFermi-Pasta-Ulam の計算実験は両端を固定したものであった。これにつづいて，時間経過，エルゴード性を調べたものは同じ境界条件を用いたものが多い。第2に，連続体(K-dV方程式)の再帰現象の計算機実験をしたZabusky-Kruskal は周期条件を採用している。これら二つの計算機実験は，不連続体と連続体との関係を考えれば，同等なものであって，再帰現象は soliton (有限個)の運動によって解釈できる(TODA[1], 1968)。周期条件の場合は(solitonが衝突の際に互いに中を通り抜けると考えれば)，各 soliton は一定方向に進み続ける。他方で固定端においては soliton は弾性衝突

をすることによって進行方向が逆になるが、soliton の山は山として（rarefaction の soliton が許されれば反射した soliton も rarefaction）反射する。

このように固定端における soliton の反射は逆向きに走る同形，同高の２個の soliton の衝突と同じである。したがってこれはすでに本質的に解決ずみである（TODA[1] 1968，TODA-WADATI[2] 1973）。

現在解決されていなくて，重要なのは (iii) の自由端の問題である。

§2．自由端での反射

非線型媒質で自由端とは何を意味するのであろうか。これを連続体模型で始めから考えようとしても無理である。例えば K-dV 方程式 $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ で u が媒質の変位なのか，水の高さなのか，圧力なのか etc. ということをきめないと自由端という言葉の解釈が定まらないからである。他方で，非線型格子，LC 回路はしご，などならば自由端は意味を考えやすい。格子の自由端は，そこで格子が切れていること，あるいはそこのバネの力の定数が０になったものが自由端である。

非線型格子は大まかにいって２種類ある。バネの性質で考

えて分類しよう。

(a) バネの強さが，伸びと縮とで同様に変化するもの。

バネの位置エネルギーを $\phi(r)$，伸びを r とするとき，非線型項が4次で始まるもの：

$$\phi(r)=\frac{\kappa}{2}r^2+\frac{\mu}{4}r^4+\cdots$$

である。この格子では圧縮ソリトンも伸長ソリトンも同様に可能であり，これらは互いに符号が逆である。

自由端は $r_N=0$ である*から，対称性から明かなように自由端での反射により，圧縮ソリトンは高さ幅の等しい伸長ソリトンになり，伸長ソリトンは高さ幅の等しい圧縮ソリトンになる（解析的な解は得られていないので，現在研究中である）。これは圧縮ソリトンと，高さ幅の等しい伸長ソリトンの，逆向きに走って衝突する場合であると見てもよい。

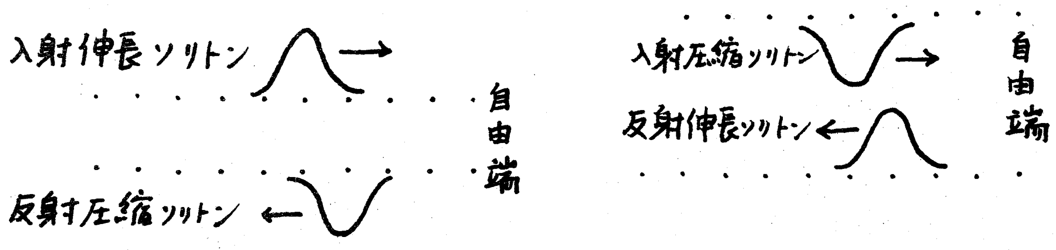
---

* 非線型格子の粒子を $n=\cdots,1,2,\cdots,N$ とし，$n=N$ が自由端であるとする。この代りに無限格子 $n=\cdots,1,2,\cdots,N,N+1,\cdots$ を考えると，粒子 N の変位と粒子 $N+1$ の変位とが等しく，その間の距離の変化が常に0ならば，粒子 N には右から力が働かないことになる。したがって自由端は条件

$$r_N=0$$

によって表わされる。

この場合の自由端における反射を図示すると下のようになる。縦軸は r_n を表わすので伸長ソリトンは山形，圧縮ソリトンは谷形である。



(b) バネの強さが，伸びると弱くなり，縮むと強くなるもの（逆に伸びると強くなり，縮むと弱くなるものも同様に考えることができる）。非線型項は r の3次ではじまり

$$\phi(r)=\frac{\kappa}{2}r^2-\frac{\gamma}{3}r^3+\cdots$$

である。$\gamma>0$ としている（伸びると弱くなるバネ）。いわゆる exp-格子[3)]

$$\phi(r)=\frac{a}{b}e^{-br}+ar$$

の $a>0,\ b>0$ の場合を考えれば，soliton の解析的解は

$$e^{-br_n}-1=\frac{m}{ab}\beta^2\,\mathrm{sech}^2(\kappa n\mp\beta t)$$

ただし $\beta=\sinh\kappa$

であり（m は粒子の質量），$r_n<0$，すなわち圧縮ソリトンで

ある。このソリトンが自由端に達したとき，反射波は伸長波でなければならないが，これを表わす解析的解はまだ得られていない。

ソリトンの高さが小さければ，線型近似が成り立つであろう。そうすれば，反射波は当然，伸長ソリトンであるが，そのような解は未知である。

発散する伸長波を表わす特殊解はいくつかあることがわかった。簡単なものは

$$e^{-br_n}-1=-\frac{m}{ab}\beta^2\operatorname{cosech}^2(\kappa n\mp\beta t)$$

ただし $\beta=\sinh\kappa$

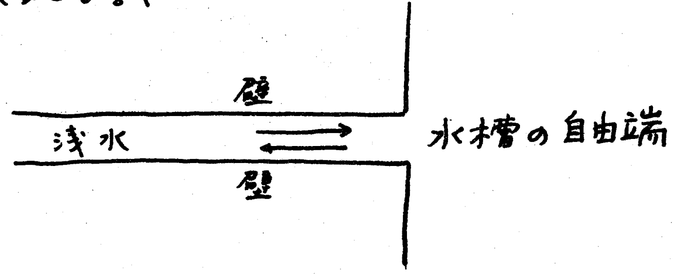
である。これは今まで，発散するので棄てていたが，自由端で反射した際にはこれか，これに似た波に変わるかも知れない。これは発散波であり，反射波によって格子が破壊する現象がこれによって表わされる可能性がある。

バネは伸びればやわらかくなるとしているから，圧縮ソリトンが自由端に達して伸長パルスに変わったときは，その波高は高くなり，入射パルスに比べてずっと大きなパルスに変わる筈である。しかし exp-格子では $r\to\infty$ で $\phi\to\infty$ であるから，有限エネルギーの入射ソリトンによって $r\to\infty$ の発散パルスを生じるわけはない。

ただし，rが十分大きくなるとバネが実際は切れるとして$\phi(r)$に対しrの上限をつけることが考えられ，十分バネが伸びれば破壊が起こると仮定することはできる。こう考えて破壊現象を扱おうとすれば，これは必ずしも(b)の格子によらず，(a)の格子によって論じても性質的には似たことになる。(a)の格子で圧縮ソリトンが入射し，反射して伸長ソリトンに変わるが，$r > r_{max}$になれば，そこでバネが切れるとすればよいわけである。

§3. 結語

自由端での反射を水槽で調べるといいと思う。末端で大きく開いた浅水槽では，この末端で水の上昇が0という条件が成り立つと考えられる。** 水の上昇はBoussinesqの方程式で表わされ，連続体近似による結果が実験的に得られることが期待される。(** 波長（パルス幅）が長く回折が無視できれば)



圧縮パルスが自由端で反射するとき，その材料が破壊する現象が知られている。これは上の議論と深く関係があると思われるが，現在のところこの現象を十分説明するに到ってい

ない。また，ガラスファイバーを静かに伸長した場合，どこかで切断が起こると，次いでそこから一定速度でファイバーが小さく割れて霧散する現象がある。[4] この場合，始めの伸長の状態が固定端へ進んで反射して，このときは圧縮に変じるが，その間に非線型効果によって変形された波形がソリトンに分かれて，自由端に到って破壊を起こす機構が考えられる。

文献

1) M. TODA : J. Phys. Soc. Japan, 26 Suppl. 1969 (Proc. Int. Conf. Statis Mech. 1968) p.235.

2) M. TODA + M. WADATI : J. Phys. Soc. Japan, 34 (1973) 18.

3) M. TODA : J. Phys. Soc. Japan, 22 (1967) 431, 23 (1967) 501.

4) 兵藤申一 : private communication.